流形上的微分形式与 Stokes 定理

王鲲鹏

2023 年 6 月 14 日

摘要

本文是笔者学习 Stokes 定理的笔记. 从流形定义出发, 说明了流形的定向和流形上的单位分解存在性定理. 此后从切向量出发, 尽可能精确而简要地给出微分形式的定义. 最后给出了流形上的积分的合理定义, 并证明了一般的 Stokes 定理.

目录

1 引言

在数学分析的课内学习中, 王海涛老师向我们展示了微积分基本定理的大统一形式

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

并指出 $< M, d\omega >$ 和 $< \partial M, \omega >$ 存在一种对偶关系. 这样简洁的公式统一了 Newton-Leibniz Gauss Green Stokes 公式, 具有简洁的美感. 众所周知, Newton-Leibniz 定理又被称为微积分基本定理, 更可见该公式的重要性. 在证明 Gauss, Green, Stokes 定理 (狭义) 时, 老师强调, 课本上的证明是直观的但不严格的, 严谨的证明是直接证明了流形上的统一公式.

然而课上限于时间有限, 老师只简要展示了这样的结果, 举例说明了微分形式的运算规则. 因此虽然我们能体会到公式中的美感, 却不能深刻理解公式中的运算逻辑, 而对于微分形式也仅限于形式上的变换, 不知道其确切的含义. 因此我选择了 « 流形上的微分形式与 Stokes 定理 » 作为我的小论文选题, 期望通过自己的了解建立起对对这套理论的严格的认知体系.

在本文中, 我首先定义了流形、流形上的定向和流形边界的诱导定向, 并证明了重要的流形上的单位分解存在定理.

然后, 用反称协变张量丛的概念定义了微分形式和外微分运算. 在这一节, 我加深了对微分算子 d 的理解, 更重要的是, 明确了学习微积分以来一直遇到的 dx, df 这样的符号的含义. 这一节可能是本文中最为抽象的一节.

接着, 在明确了微分形式后, 定义了微分流形上的积分, 并证明了该积分的定义是恰当的. 流形的积分同样用到了流形的重要观点 “局部线性化”, 在局部坐标系中, 直接定义为对应坐标下的重积分. 而在全局则通过单位分解将函数分解为若干局部的加和.

最后, 在完成了上述准备工作后, 给出了 Stokes 定理的证明.

2 流形

2.1 流形的定义

在阐述流形之前, 需要给出同胚的定义.

定义 2.1.1 (同胚)**.** 如果在拓扑空间 (X, τ_X) 和 (Y, τ_Y) 之间的函数 $f : X \to Y$ 具有下列性质:

- f 是双射
- f 是连续[1]的

[1]注意这里的连续不依赖于度量

- f^{-1} 是连续的

则称 (X, τ_X) 和 (Y, τ_Y) 同胚.

定义 2.1.2 (流形)**.** 如果豪斯多夫拓扑空间 M 具有可数拓扑基[2], 并且满足 $\forall x \in M$, 存在开邻域 $U \ni x$ 与 $\mathbb{R}^n$ 或者半空间 $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x^1 \leq 0\}$ 同胚, 则称 M 为 n 维流形.

这里给出的定义包含流形与带边流形.

定义 2.1.3 (局部图)**.** 对于流形 M, 实现定义 2.1.2 中的同胚的映射 $\varphi : \mathbb{R}^n \to U \subset M$ (或 $\varphi : H^n \to U \subset M$) 称为流形 M 的局部图, $\mathbb{R}^n$ (或 H^n) 称为其参数域, U 称为局部图在流形 M 上的作用域.

注解 2.1. 局部图的映射方向也可以反过来, 由 U 映射到 $\mathbb{R}^n$ 或者 H^n.

定义 2.1.4 (图册)**.** 如果一组局部图的全体作用域能覆盖整个流形, 则这一组局部图称为该流形的图册.

定义 2.1.5 (维度)**.** 定义 2.1.2 中的数 n 称为流形 M 的维数, 记作 $\dim M$.

维度的定义依赖于所有局部图的参数域的维度都是相同的, 区域不变性定理给出保证.

定义 2.1.6 (边界)**.** 对于定义 2.1.2 中的同胚 $\varphi : H^n \to U \subset M$, 如果半空间 H^n 的边界 ∂H^n 上的点 $\varphi^{-1}(x)$ 对应着点 $x \in U$, 则称 x 为流形 M 的边界点. 流形 M 的所有边界点的集合称为该流形的边界, 记为 ∂M.

注意, 边界 ∂M 有良定义依赖于内点的拓扑不变性. 该不变性由克劳威尔定理给出.

定义 2.1.7. 具有非空边界点集的流形称为带边流形.

定理 2.2 (边界的维数)**.** n 维带边流形 M 的边界 ∂M 是 $n-1$ 维无边流形.

证明. M 的图册中的局部图 $\varphi_i : H^n \to U_i$ 同样是 ∂M 的局部图, 因为 $\varphi_i : \partial H^n \to U' \subset \partial M$, 而 $\partial H^n = \mathbb{R}^{n-1}$. 所有这样的局部图构成了 ∂M 的图册, 所以 $\dim \partial M = n-1$.

由于 ∂M 的所有局部图的参数域都是 $\mathbb{R}^{n-1}$, 因此 ∂M 是无边流形. □

在流形的内点去看流形, 近似于一个完整的 $\mathbb{R}^n$. 在边界点上看流形, 是一个半空间 H^n. 而在边界上的每一点看到的都近似是 $\mathbb{R}^{n-1}$, 所以边界上的每个点都是内点.

很多时候, 我们更关心 “光滑” 的流形. 因为流形中不具有度量, 因此我们无法像刻画 R^n 中的曲面一样讨论流形的光滑性. 如果图册只由一张图构成, 可以认为图册是无限光滑的.

如果流形 M 的两张图 (U_i, φ_i), (U_j, φ_j) 的作用域 U_i, U_j 相交, 则在集合 $I_{ij} = \varphi_i^{-1}(U_j)$ 和 $I_{ji} = \varphi_j^{-1}(U_i)$ 之间可以建立互逆同胚 $\varphi_{ij} : I_{ij} \to I_{ji}$,$\varphi_{ji} : I_{ji} \to I_{ij}$. φ_{ij} 和 φ_{ji} 被称为坐标代换函数.

[2]满足第二可数性公理

定义 2.1.8 (光滑流形)**.** 如果一个流形的图册中各图的所有坐标变换函数都是 $C^{(k)}$ 类光滑映射, 则称该图册为 $C^{(k)}$ 类光滑图册, 该流形称为 $C^{(k)}$ 类光滑流形.

2.2 流形的定向

在 R^n 空间中, 由一组标架向另一组标架的基变换矩阵的行列式必为正数或负数. 变换矩阵的行列式为正的标架可以划分至同一个定向标架类, 进而可以将空间的所有标架分为两个等价类.

光滑流形的定向通过其图册来确定.

定义 2.2.1 (相容)**.** 在光滑流形中, 两个图称为相容的, 如果在它们的公共作用域中, 坐标代换函数处处具有正的 Jacobi 行列式.

定义 2.2.2 (定向图册)**.** 如果光滑流形 (M, A) 的图册 A 由两两相容的图组成, 则称 A 为流形 M 的定向图册.

定义 2.2.3 (可定向流形)**.** 具有定向图册的流形称为可定向流形.

一个连通流形要么不可定向, 比如莫比乌斯环, 要么有两种定向.

2.3 边界的定向

定理 2.3. 可定向光滑 n 维流形的边界是可定向 $n-1$ 维流形, 它与原流形具有同样的光滑性.

在证明这个定理之前, 我们先指出它的一个重要结果. 如果将流形 M 的定向图册的参数域限制在半空间 H^n 的边界 $\partial H^n = \mathbb{R}^{n-1}$ 上, 其作用域也将自然地限制到带边流形 M 的边界 ∂M 上.

定义 2.3.1 (诱导定向)**.** 如果 $A(M) = \{(H^n, \varphi_i, U_i)\} \cup \{(\mathbb{R}^n, \varphi_j, U_j)\}$ 是流形 M 的定向图册, 则图集 $A(\partial M) = \{(R^{n-1}, \varphi_i|_{\partial H^n = R^{n-1}}, \partial U_i)\}$ 构成了流形 ∂M 的定向图册. 该图册给出的边界定向称为与流形 M 相容的边界定向, 即边界的诱导定向.

诱导定向的实质是, 在边界附近, 流形与其边界可以共用一套图册. 下面给出定理 2.3 的证明.

证明. 只须证明, 图集 $A(\partial M) = \{(R^{n-1}, \varphi_i|_{\partial H^n}, \partial U_i)\}$ 是两两相容的.

设坐标变换函数 $\psi : H^n \to H^n$ 是微分同胚, 且具有正的 Jacobi 行列式. 只要证明 $\psi|_{\partial H^n} : R^{n-1} \to R^{n-1}$ 也具有正的 Jacobi 行列式.

根据已知的相容性条件, 设 $x \in H^n$, 有

$$J_n(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi^1}{\partial x^1} & \frac{\partial\psi^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\psi^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial\psi^2}{\partial x^1} & \frac{\partial\psi^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\psi^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\psi^n}{\partial x^1} & \frac{\partial\psi^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\psi^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} (x) > 0 \tag{1}$$

当 $x^1 = 0$, 由于 $\psi(\partial H^n) \subset \partial H^n$, 则当 $k \geq 2$ 时, $\frac{\partial\psi^1}{\partial x^k}(x) = 0$. 从而知

$$J_n(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi^1}{\partial x^1} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial\psi^2}{\partial x^1} & \frac{\partial\psi^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\psi^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\psi^n}{\partial x^1} & \frac{\partial\psi^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\psi^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} (x) = \frac{\partial\psi^1}{\partial x^1}(x) \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\psi^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\psi^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\psi^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} (x) > 0 \tag{2}$$

取 $y \in \partial H^n = \mathbb{R}^{n-1}$, 不妨记 y 的坐标 $y = (0, y^2, \cdots, y^n)$, 则

$$J_{n-1}(y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi^2}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial\psi^2}{\partial y^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\psi^n}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial\psi^n}{\partial y^n} \end{vmatrix} (y) = \frac{J_n(y)}{\frac{\partial\psi^1}{\partial y^1}(y)} \tag{3}$$

由于 $J_n(x) > 0$, 当 $x^1 = 0$, 我们知道 $\frac{\partial\psi^1}{\partial x^1}(x)$ 不等于 0, 只需说明 $\frac{\partial\psi^1}{\partial x^1}(x)$ 不是负数.

假设 $\frac{\partial\psi^1}{\partial x^1}(x) < 0$, 对 ψ^1 应用泰勒展开, 固定 $x_2, x_3, \cdots, x_n$, 记 $x' = (\Delta x^1, x^2, \cdots, x^n)$,

$$\psi^1(x') = \frac{\partial\psi^1}{\partial x^1}(x)\Delta x^1 + o(\Delta x^1)$$

所以存在 $\Delta x^1 < 0$, $\psi(x') > 0$, 也就是说, $\psi(x') \notin H^n$, 与 ψ 的定义矛盾.

这样, 我们就说明了将 ψ 限制在 ∂H^n 后的行列式 $J_{n-1} > 0$, 也就是说, M 的定向图册限制到 ∂M 上之后, 仍然是两两相容的, 从而 ∂M 也是可定向的.

由于使用的是同一套图册, 限制参数域后光滑性不变. □

2.4 单位分解存在性定理

单位分解可以将常映射 1 拆成至多可数个函数的和, 使得每个函数的支集都限制在局部.

定义 2.4.1 (单位分解)**.** 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为微分流形 M 的开覆盖. 如果存在至多可数个光滑函数 $\{g_i : M \to R\}$ 满足

1. $0 \leq g_i(x) \leq 1, \forall x \in M$,
2. 对每一个 g_i, 存在 $\alpha(i) \in \Gamma$, 使得 $\operatorname{supp} g_i \subset U_{\alpha(i)}$,

3. $\forall x \in M$, 存在 x 的邻域 U, 使得只有有限个 $\operatorname{supp} g_i$ 与 U 的交集不为空. 也就是说 $\{\operatorname{supp} g_i\}$ 是局部有限的,

4. $\sum_i g_i(x) \equiv 1, \forall x \in M$.

则称 $\{g_i\}$ 为从属于开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 的一个单位分解.

下面我们说明, 微分流形上的单位分解总是存在的.

引理 2.4 (穷竭列). 对于任何微分流形, 均存在一列开集 $\{G_i\}$, 使得 $\overline{G_i}$ 是紧的, 并且

$$\overline{G_i} \subset G_{i+1}, i \geq 1 \qquad \bigcup_i G_i = M$$

证明. 构造法. 首先 $\forall x \in M$, 取 x 的邻域 V_x 使得 $\overline{V_x}$ 是紧致的. 因为微分流形 M 有可数拓扑基, 因此存在至多可数个 x_i 使得 $\{V_{x_i}\}$ 是 M 的开覆盖. 令 $G_0 = \varnothing$, $G_1 = V_{x_1}$. 假设 $G_1, \cdots, G_i$ 均定义好, 必存在 I 使得

$$\bigcup_{k\leq i} \overline{G_k} \subset \bigcup_{j\leq I} V_{x_j}$$

令 $G_{i+1} = \bigcup_{j\leq I} V_{x_j}$ 即可. □

引理 2.5 (鼓包函数). 在 $\mathbb{R}^n$ 上存在光滑函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 使得

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

定理 2.6 (单位分解定理存在性). 对于微分流形 M 的任何开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$, 均存在从属于它的单位分解.

证明. 令 $\{G_i\}$ 为 M 的穷竭列 (由引理知穷竭存在), 令 $A_i = \overline{G_i} - G_{i-1}$. 易知 A_i 是紧致闭集, 且 $\{A_i\}$ 是 M 的一个覆盖.

任给 $x \in A_i$, 选取 x 的局部坐标系 U_x, φ_x 使得

1. 存在 $\alpha(x) \in \Gamma$, 使得 $U_x \subset U_{\alpha(x)}$.

2. $\varphi_x(U_x) = B_2(0)$

3. $\forall |j-i| > 1, U_x \cap A_j = \varnothing$.

设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的鼓包函数, 定义函数 $f_x : M \to \mathbb{R}$

$$f_x(p) = \begin{cases} f(\varphi_x(p)), & p \in U \\ 0, & p \in M - U \end{cases}$$

令 $V_x=\varphi^{-1}(B_{\frac{1}{2}}(0))$, 则 $\{V_x|x\in A_i\}$ 构成 A_i 的开覆盖, 可选出有限个点 $x_1^i,\cdots,x_{k(i)}^i$ 使得 $\{V_{x_j^i|1\leq j\leq k(i)}\}$ 覆盖 A_i.

这样的选择保证了每个点 $x\in A$, $\sum_{j\leq k(i)}f_{x_j^i}(x)>0$, 且 $\{\operatorname{supp}f_{x_j^i}\}$ 是局部有限的. 最后, 进行归一化. 和函数

$$\psi(x)=\sum_i\sum_{j\leq k(i)}f_{x_j^i}(x)$$

是 M 上的光滑函数, 且恒为正. 从而 $\{\frac{f_{x_j^i}}{\psi}\}$ 为所求的从属于开覆盖的单位分解. □

3 微分形式

3.1 由来

在二维重积分 $\iint_\Sigma fdxdy$ 中, 我们采用小矩形逼近的方式定义 “面积”. 而在曲面积分中, 我们同样需要合理地定义 “面积”.

我们自然地想问, 如何在 n 维空间中定义 k 维区域的 “体积”? 更精确地说, 给定 n 维空间中的 k 个向量, 如何求这 k 个向量张成的 k 维平行立方体的体积? 当 $k=n$ 时, 我们知道, 只需要对这 k 个向量求行列式, 就得到了体积. 当 $k<n$ 时, 就是问能否定义一种运算, 接受 k 个向量, 输出体积. 这样的运算需要满足一些基本的性质, 比如线性性、反对称性.

3.2 切向量、切空间和切丛

切空间和切向量都是相对于流形上的一个点而言. 一点处的切空间是这一点处全体切向量的集合. 切丛是流形上全体切空间的并.

先以 $\mathbb{R}^n$ 为例. 显然任意一点的切空间同样是 $\mathbb{R}^n$. 首先给出断言, 切空间和线性微分算子构成的空间是等价的. 对于 p 点的切向量 v_p, 可以对任意一个可微函数 f 求 v_p 方向上的导数

$$v_p[f]=\frac{d}{dt}f(p+tv_p)=\sum_{i=1}^n\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p v_p^i$$

也就是说

$$v_p[\cdot]=\sum_{i=1}^n v_p^i\left.\frac{\partial\cdot}{\partial x^i}\right|_p$$

这样我们就构造了切空间和线性微分算子构成的空间 $\{\frac{\partial}{\partial v}\}$ 的一个等价关系. 通过推广这个关系到流形上, 我们得到了流形上切向量的定义.

定义 3.2.1 (切向量). 记 $C^\infty(M)$ 为微分流形 M 上光滑函数的全体组成的向量空间. 设 $p\in M$, 如果线性映射 $X_p:C^\infty(M)\to\mathbb{R}$ 满足

$$X_p(fg)=f(p)X_pg+g(p)X_pf,\forall f,g\in C^\infty(M)$$

则称 X_p 为 M 在 p 处的切向量.

定义 3.2.2 (切空间). 切向量的全体组成的向量空间称为 p 处的切空间, 记为 T_pM. 记 $T_p^\star M$ 为 T_pM 的对偶空间, 称为余切空间.

注解 3.1. T_pM 是维数为 $\dim M$ 的有限维向量空间.

定义 3.2.3 (切丛). 设 M 是微分流形, 定义其切丛 TM 为

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$$

而其对偶丛

$$T^\star M = \bigcup_{p\in M} T_p^\star M$$

定义 3.2.4 (向量场). 定义投影映射 $\pi : TM \to M$ 为 $\pi(X_p) = p, \forall X_p \in T_pM$. 设 $X : M \to TM$ 为 C^k 映射, 如果 $\pi \circ X = id_M$ 为 M 上的恒等映射, 则称 X 为 M 上的 C^k 切向量场, 简称向量场.

粗略地说, 向量场 X 为每个点 $p \in M$ 指定了一个切向量 X_p.

如果 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 为 p 附近的局部坐标, 则 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}|_p\right\}_{i=1}^n$ 是 T_pM 的一组基. 在对偶空间 $T_p^\star M$ 中, 有相应的对偶基, 记为 $\{dx_\alpha^i(p)\}_{i=1}^n$, 即

$$dx_\alpha^i(p)(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}|_p) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

也就是说, 局部坐标函数 $\{x_i\}$ 定义了局部的余切向量场 dx^i

$$dx^i : M \to T^\star M, p \mapsto dx^i(p)$$

一般地, 设 $f : M \to R$ 是 M 上的光滑函数, 任给 $p \in M$, $X_p \in T_pM$, 定义 $df(p)(X_p) = X_pf$, 于是 $df : M \to T^\star M, p \to df(p)$ 是一个余切向量场. df 为光滑 1-形式, 称为 f 的外微分. 我们将在后文中对微分形式进行严格定义. 在局部坐标下, df 可以表示为

$$df = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f\right) dx^i$$

3.3 张量

在这一小节, 我们将简单介绍张量的运算, 而不细致展示证明.

定义 3.3.1 (张量). 设 (r, s) 为非负整数对, $(r, s) \neq (0, 0)$. 如果函数

$$\theta : T_p^\star M \times \cdots \times T_p^\star M \times T_pM \times \cdots \times T_pM \to R \quad (r\text{ 个}T_p^\star M \text{ 和}s\text{ 个}T_pM)$$

对每个分量都是线性的, 则称 θ 为 p 处的 (r, s) 型张量, r 为逆变指数, s 为协变指数. 以 $\otimes^{r,s}T_pM$ 表示 p 处 (r, s) 型张量的全体, 在自然的加法和数乘之下成为向量空间.

我们称 $(r,0)$ 型张量为 r 阶逆变张量, $(0,s)$ 型的张量为 s 阶的协变张量.

定义 3.3.2 (张量积). 定义张量积运算

$$\begin{aligned}\otimes : \otimes^{r,s} T_pM \times \otimes^{t,h} T_pM &\to \otimes^{r+t,s+h} T_pM \\ (\theta,\eta) &\mapsto \theta\otimes\eta\end{aligned}$$

其中对于 $W_i \in T_p^\star M$ ($1\le i\le r+t$), $X_j \in T_pM$ ($1\le j\le s+h$), 有

$$\begin{aligned}&\theta\otimes\eta(W_1,\cdots,W_{r+t};X_1,\cdots,X_{s+h})\\ =&\theta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)\cdot\eta(W_{r+1},\cdots,W_{r+t};X_{s+1},\cdots,X_{s+h})\end{aligned}$$

可以验证, 张量积具有如下性质:

1. 偏线性 $(\theta+\xi)\otimes\eta=\theta\otimes\eta+\xi\otimes\eta$, $\theta\otimes(\xi+\eta)=\theta\otimes\xi+\theta\otimes\eta$, $(\lambda\theta)\otimes\eta=\theta\otimes(\lambda\eta)=\lambda\theta\otimes\eta$
2. 结合律 $(\theta\otimes\xi)\otimes\eta=\theta\otimes(\xi\times\eta)$
3. $(\otimes^{r,s}T_pM)\otimes(\otimes^{t,h}T_pM)$ 与 $\otimes^{r+t,s+h}T_pM$ 同构

注解 3.2. $\otimes^{0,1}T_pM=T_p^\star M$, $\otimes^{1,0}T_pM=T_p^{\star\star}M=T_pM$.

3.4 微分形式

微分形式是一种特殊的协变张量场.

定义 3.4.1 (外形式). 设 $\omega\in\otimes^{0,s}T_pM$ 为 p 处的 s 阶协变张量, 如果任给切向量 $X_1,\cdots,X_s\in T_pM$ 以及 $(1,2,\cdots,s)$ 的置换 π, 均有

$$\omega(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(s)})=(-1)^\pi\omega(X_1,\cdots,X_s)$$

则称 ω 为 s 阶反称协变张量或 s 阶外形式.

s 阶外形式的全体组成的子向量空间记为 $\bigwedge^s T_p^\star M$.

定义 3.4.2 (反称化). 设 θ 为 s 阶协变张量, 定义

$$\mathcal{A}(\theta)(X_1,\cdots,X_s)=\frac{1}{s!}\sum_\pi(-1)^\pi\theta(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(s)})$$

其中 π 取遍 $(1,\cdots,s)$ 的置换群.

称运算 $\mathcal{A}$ 为反称化.

注解 3.3. 可以证明

1. 映射 $\mathcal{A}:\otimes^{0,s}T_pM\to\bigwedge^s T_p^\star M,\theta\mapsto\mathcal{A}(\theta)$ 的定义是恰当的

2. θ 是反称协变张量当且仅当 $\mathcal{A}(\theta)=\theta$.

定义 3.4.3 (外积). 设 α,β 分别为 r,s 阶反称协变张量, 我们定义一个 $r+s$ 阶的反称协变张量 $\alpha\wedge\beta$

$$\alpha\wedge\beta=\frac{(r+s)!}{r!s!}(\alpha\otimes\beta)$$

映射 $\wedge:\bigwedge^r T_p^\star M\times\bigwedge^s T_p^\star M\to\bigwedge^{r+s}T_p^\star M,(\alpha,\beta)\mapsto\alpha\wedge\beta$ 称为外积或楔积运算.

注解 3.4. 楔积运算具有如下性质:

1. 偏线性, $\alpha\wedge(\gamma+\delta)=\alpha\wedge\gamma+\alpha\wedge\delta$, $(\alpha+\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge\gamma+\beta\wedge\gamma$, $(\lambda\alpha)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\lambda\gamma)=\lambda\alpha\wedge\gamma,\lambda\in\mathbb{R}$

2. 若 α,β 分别为 r,s 阶反称协变张量, 则 $\alpha\wedge\beta=(-1)^{rs}\beta\wedge\alpha$.

3. 若 α,β,γ 分别为 r,s,t 阶反称协变张量, 则

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)=\frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}\mathcal{A}(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)$$

设 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为 $T_p^\star M$ 的一组基, 记 $\bigwedge T_p^\star M=\bigwedge^0 T_p^\star M\otimes\bigwedge^1 T_p^\star M\otimes\cdots\otimes\bigwedge^n T_p^\star M$, 其中 $n=\dim M$, 则 $\{1,e^i,e^i\wedge e^j,\cdots,e^1\wedge\cdots\wedge e^n\}$ 为 $\bigwedge T_p^\star M$ 的基. 从而 $\dim\bigwedge T_p^\star M=\binom{n}{0}+\cdots+\binom{n}{1}=2^n$. 外积运算可以自然地定义在 $\dim\bigwedge T_p^\star M$ 上使之成为一个代数, 称为外代数.

如果 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 为 p 附近的局部坐标, 我们可以在局部将 s 阶反称协变张量 ω 用基 $\{dx_\alpha^{i_1},\cdots,dx_\alpha^{i_s}\}$ 表示为

$$\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_s}\omega_{i_1\cdots i_s}dx_\alpha^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^{i_s}$$

其中 $\omega_{i_1\cdots i_s}=\omega(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{i_1}}|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{i_s}}|_p)$.

如果我们能说明 ω 与坐标卡的选取无关, 也就是给出不同坐标间的转换公式, 就能合理地将局部的反称协变张量推广至张量丛. 可以证明, 如果 (U_β,φ_β) 是 p 附近的另一局部坐标,

$$\omega=\sum_{j_1<\cdots<j_s}\omega'_{j_1\cdots j_s}dx_\beta^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_\beta^{j_s}$$

可得

$$\omega'_{j_1\cdots j_s}=\sum_{i_1<\cdots<i_s}\det(\frac{\partial(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1})^{i_k}}{\partial x^{j_l}})_{s\times s}\cdot\omega_{i_1\cdots i_s}$$

因此, 令 $\bigwedge^s T^\star M=\bigcup^{p\in M}\bigwedge^s T_p^\star M$, 则 $\bigwedge^s T^\star M$ 是 M 上的向量丛, 是张量从 $\otimes^{0,s}TM$ 的子丛, 称为 s 阶外形式丛. 外形式丛的截面给出流形上的微分形式.

定义 3.4.4 (微分形式). 称 C^k 类光滑映射 $\omega:M\to\bigwedge^s T^\star M$ 为 M 上的 s 次 C^k 微分形式, 或简称 s 形式.

微分形式之间可以自然地定义外积运算.

先前我们给出了流形上光滑函数 f 的在局部坐标下的外微分

$$df = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f \right) dx^i$$

现在考虑将外微分运算推广到微分形式上.

定义 3.4.5 (外微分). 设 ω 为 s 次微分形式, 对于任意光滑向量场 X_i, 令

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \cdots, X_{s+1}) &= \sum_{i=1}^{s+1} (-1)^{i-1} X_i \omega(X_1, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots, X_{s+1}) \\ &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots, \widehat{X_j}, \cdots, X_{s+1}) \end{aligned}$$

其中^符号表示去掉该项, $[X_i, X_j]$ 是 Lie 括号. 则称 $d\omega$ 为 ω 的外微分.

注解 3.5. 我们需要说明 $d\omega$ 是 $s+1$ 次的微分形式, 这里略. 外微分算子 d 具有如下性质:

1. $d(\lambda\omega + \mu\eta) = \lambda d\omega + \mu d\eta, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta$, ω 为 r 次微分形式. 特别地, 设 0 形式 f 是光滑函数, $d(f \cdot \omega) = df \wedge \omega + f \cdot d\omega$.
3. $d^2 = 0$.

4 微分形式在可定向流形上的积分

设 M 是 n 维 (带边) 流形, 并在 M 上给定了一个定向. 设 ω 为 M 上具有紧支集的 n 次微分形式, 即支集

$$\operatorname{supp} \omega = \overline{\{x \in M | \omega(x) \neq 0\}}$$

为紧集. 我们假定以下出现的局部坐标系均与给定定向相容.

4.1 支集含于局部

假设 $\operatorname{supp} \omega \in U_\alpha$, 且在局部坐标邻域 U_α 下 ω 表示为

$$\omega = a_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n$$

其中 $a_\alpha : M \to \mathbb{R}$. 定义 ω 在 M 上的积分 $\displaystyle\int_M \omega$ 为如下多元函数的积分

$$\int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} a_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n$$

定理 4.1. 该定义与局部坐标的选取无关.

证明. 设 $\operatorname{supp}\omega$ 含于另一局部坐标 U_β, 则在 U_β 中, ω 可以表示为

$$\omega = b_\beta dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^n$$

则有 $b_\beta = \det J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) a_\alpha$, 因此积分值

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi_\beta(U_\beta)} b_\beta \circ \varphi_\beta^{-1} dx_\beta^1 \cdots dx_\beta^n &= \int_{\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)} b_\beta \circ \varphi_\beta^{-1} dx_\beta^1 \cdots dx_\beta^n \\
&= \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} |\det J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})| b_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n \\
&= \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} a_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n
\end{aligned}$$

□

4.2 有限项和

设 $\omega = \sum_{i=1}^k \omega_i$, 且 ω_i 的支集均含于某一个局部坐标邻域 U 中, 则 ω 的支集也含于 U 中, 定义

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^k \int_M \omega_i$$

4.3 完整流形

由于 ω 是具有紧支集的 n 次微分形式, 存在 $\operatorname{supp}\omega$ 的一个有限局部坐标覆盖, 存在从属于该覆盖的单位分解 $\{\varphi_\alpha\}$, 定义

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_M \varphi_\alpha \cdot \omega$$

这里需要说明的是, 该定义与具体的坐标覆盖和单位分解的选取无关.

如果有另一个坐标覆盖和对应的单位分解 $\{\psi_\beta\}$, 对每个固定的指标 α,

$$\int_M \varphi_\alpha \omega = \sum_\beta \int_M \psi_\beta \varphi_\alpha \omega$$

右边的指标 β 只会取到有限项. 同理有

$$\int_M \varphi_\beta \omega = \sum_\alpha \int_M \varphi_\alpha \psi_\beta \omega$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \int_M \varphi_\alpha \omega &= \sum_\alpha \sum_\beta \int_M \psi_\beta \varphi_\alpha \omega \\ &= \sum_\beta \sum_\alpha \int_M \psi_\beta \varphi_\alpha \omega \\ &= \sum_\beta \int_M \psi_\beta \omega\end{aligned}$$

因此如上定义无歧义.

5 Stokes' theorem

定理 5.1. 设 M 为 n 维带边流形, ω 为 M 上具有紧支集的 $n-1$ 次微分形式, 则

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

其中 ∂M 上的定向为诱导定向.

证明. 通过单位分解, 不妨设 $\operatorname{supp}\omega$ 含于坐标邻域 U 中, φ 为 U 上的坐标映射. 由坐标映射的连续性, 有

$$\varphi(U \cap \partial M) = \varphi(U) \cap \partial H^n$$

$n-1$ 次微分形式 ω 在 U 中可以表示为

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge dx^n$$

从而

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

下面分两种情况讨论

(1) $\partial M \cap U = \varnothing$.

$$\begin{aligned}\int_M d\omega = \int_U d\omega &= \sum_{i=1}^n \int_{\varphi(U)} \frac{\partial a_i}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^n = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial a_i}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a_i}{\partial x^i} dx^i \right) dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_i|_{x_i=-\infty}^{x_i=+\infty} dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 0 dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n \\ &= 0\end{aligned}$$

其中, 因为 $\operatorname{supp} \omega$ 紧支, 因此 a_i 在 $\pm\infty$ 处取值为 0.

另一方面, 在边界上, 由于 $\partial M \cap U = \varnothing$, 所以 $\int_{\partial M} \omega = 0$. 所以 $\partial M \cap U = \varnothing$ 时有

$$\int_{\partial M} \omega = 0 = \int_M d\omega$$

(2) $\partial M \cap U \neq \varnothing$. 此时,

$$\begin{aligned}\int_M d\omega &= \int_{\varphi(U)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{H^n} \frac{\partial a_i}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^n \\ &= \int_{H^n} \frac{\partial a_1}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^n + \sum_{i=2}^n \int_{H^n} \frac{\partial a_i}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial a_1}{\partial x^i} dx^1 \right) dx^2 \cdots dx^n + 0 \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_1|_{x^1=-\infty}^{x^1=0} dx^2 \cdots dx^n \\ &= \int_{\partial H^n} a_1(0, x^2, \cdots, x^n) dx^2 \cdots dx^n\end{aligned}$$

另一方面, $\forall p \in \partial M, X \in T_p\partial M$, $dx^1(p)(X) = 0$, 因此对于 $i \neq 1$,

$$\int_{\partial M} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge dx^n = 0$$

从而

$$\begin{aligned}\int_{\partial M}\omega &= \int_{\partial M} a_1 dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n \\ &= \int_{\partial H^n} a_1 dx^2\cdots dx^n\end{aligned}$$

因此当 $\partial M\cap U\neq\varnothing$ 时,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M}\omega$$

综上两种情况, 结合单位分解, 对任意

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M}\omega$$

□

6 结语

终于证明完了 Stokes 定理, 我内心是喜悦的. 但我知道证明一个结论或许重要, 但更重要的是我们证明它时所采用的方法和建立的体系.

在微分流形中, 我们建立了切向量、切空间、向量丛、张量丛等体系, 从中导出反称协变张量丛作为微分形式, 并以此定义了流形上的积分. 在更广泛的范畴下, 或许有更多的有意思的定理、方法待我探索.

由于受到笔者理解能力和时间上的限制, 我仅能摘取一些定义和概要, 对于很多细节都只能加以省略. 比如对于取边界与求外微分这两个操作的联系, 我尚不能给出更直观的解释, 这可能需要我阅读更多相关的书籍. 又比如, 在文中涉及到的 Lie 括号等, 需要用到 Lie 群的相关理论, 而我尚未深入了解.

6.1 致谢

· 感谢王海涛老师引领我了解数学分析中的有趣内容

· 感谢陈翌佳老师教导我的线性代数知识带给了很大帮助

· 感谢邵奇助教推荐我梅加强先生的书 « 流形与几何初步 »

· 感谢田子桐学长解答我的疑问

参考文献

[1] B.A. 卓里奇. 数学分析. 第二卷. 数学分析. 第二卷, 2006.

[2] 守拙. 微分形式简介, 2023. `https://zhuanlan.zhihu.com/p/600380123`.

[3] 梅加强. 流形与几何初步. 流形与几何初步, 2013.

[4] 若漂. 如何通俗易懂地解释外微分? , 2020. `https://www.zhihu.com/question/263674338/answer/1648117495`.

[5] 陈纪修, 於崇华, and 金路. 数学分析-第 2 版. 数学分析-第 2 版, 2004.